

# ***Laboratorijas darbu apraksts (I semestris)***

***un***

## ***mērījumu rezultātu matemātiskās apstrādes pamati***

### **1. Fizikālo lielumu mērīšana**

Lai kvantitatīvi raksturotu kādu fizikālu lielumu  $X$ , to salīdzina ar tādas pašas dabas lielumu  $[X]$ , kurš pieņemts par mērvienību. Šādu salīdzināšanu, ko veic eksperimentāli, sauc par mērīšanu. Mērīšanas gaitā noskaidro, cik lielu mērvienību skaitu  $x$  satur fizikālais lielums  $X$  un to pieraksta šādā formā:

$$X = x[X] \quad (1)$$

kur  $x$ -mērskaits,  $[X]$ -mērvienība,  $x[X]$ - fizikālā lieluma vērtība.

**Tiešajā mērīšanā** nosakāmo fizikālā lieluma vērtību nolasa tieši no mērinstrumenta vai mēraparāta (lineāla, skrūves mikrometra, svāriem, ampērometra, luksmetra, spidometra utt.) skalas. **Netiešajā mērīšanā** nosakāmo fizikālā lieluma vērtību aprēķina, izmantojot sakarību, kas saista nosakāmo lielumu  $y$  ar citiem iepriekš tieši vai netieši izmērītiem lielumiem  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Tā, piemēram, rezistora pretestību  $R$  var noteikt no Oma likuma, izdalot rezistoram pielikto spriegumu  $U$  ar caurplūstošās strāvas stiprumu  $I$ :

$$R = \frac{U}{I},$$

šeit pretestības  $R$  vērtību iegūst netiešajā mērījumā, bet  $U$  un  $I$  vērtības var nolasīt tieši no voltmetra un ampērometra skalas.

### **2. Mērījumu kļūdas**

Fizikālā lieluma vērtību, kas *ideāli* atspoguļo aplūkojamā objekta, tā stāvokļa vai notiekošā procesa īpašību, sauc par šī fizikālā lieluma *patieso vērtību*.

Eksperimentāli iegūtie rezultāti, turpretī, dod tikai aptuvenu nosakāmā fizikālā lieluma vērtību. Tie ir atkarīgi ne tikai no fizikālā lieluma patiesās vērtības, bet arī no mērīšanas metodes, no lietotajiem tehniskajiem līdzekļiem, no mērījumu izpildītāja īpašībām un citiem apstākļiem.

Eksperimentāli noteikto fizikālā lieluma vērtību, kura tādā mērā tuvojas patiesajai vērtībai, ka izmantojama tās vietā, sauc par šī fizikālā lieluma *reālo vērtību*.

Starpību starp iegūto rezultātu  $x'$  un nosakāmā lieluma reālo vērtību  $x$ , t.i., lielumu  $x'-x$ , sauc par **absolūto kļūdu** un apzīmē  $\Delta x$ . Absolūtās kļūdas attiecību pret lieluma reālo vērtību sauc par **relatīvo kļūdu** (apzīmē  $\varepsilon$ ). To izsaka procentos:

$$\varepsilon = \frac{x'-x}{x} 100\% = \frac{\Delta x}{x} 100\%$$

Klasificējot **kļūdas pēc to izcelsmes**, jāatzīmē trīs kļūdu grupas:

- rupjās kļūdas;
- sistemātiskās kļūdas, kuras savukārt iedala trīs apakšgrupās:
  - korekcijas,
  - mērinstrumenta (mēraparatūras) kļūdas,
  - objekta kļūdas;
- gadījuma kļūdas.

Vispārīgā gadījumā tās visas kopā veido rezultāta kopējo kļūdu.

**Rupja kļūda** var rasties nepamanītas mērīšanas apstākļu izmaiņas dēļ (piemēram, izmainās elektriskajai ķēdei pieliktais spriegums), mērījuma nepareizas izpildes, mērinstrumenta rādījuma nepareizas nolasīšanas, nolasījuma kļūdaina pieraksta un citu līdzīgu iemeslu dēļ. Parasti, rezultāti, kuri satur rupju kļūdu, ievērojami atšķiras no pārējiem skaitliski, ja izdarīta vairākkārtēja dotā lieluma vērtības noteikšana. To, vai kāds rezultāts nesatur rupju kļūdu, var konstatēt, izmantojot īpašu matemātisku kritēriju (formula (13)).

Par **sistemātisku kļūdu** sauc kopējās kļūdas komponenti, kas ir konstanta vai arī likumsakarīgi mainās atkārtotos viena un tā paša lieluma mērījumos.

Tādu sistemātisku kļūdu, kuras daba ir zināma un vērtība pietiekami precīzi nosakāma, sauc par **korekciju**. Piemēram, lai izlabotu novērojumu rezultātus, kas iegūti ar mikrometru, ja uz tā skalas sākumnolasījums (bez priekšmeta) ir 0,02 mm, nevis 0,00, katram rezultātam jāpieskaita korekcija  $k = -0,02$  mm.

Tādu sistemātisko kļūdu, kas saistīta ar mērinstrumenta vai mēraparāta ierobežotu precizitāti, sauc par **mērinstrumenta (mēraparatūras) kļūdu**. Tās vērtība un zīme katrā konkrētajā novērojumā nav precīzi zināma, tomēr ļoti augsta (tuva vienam) ir varbūtība, ka mērinstrumenta kļūda nepārsniedz noteiktu vērtību  $\delta$ , ko sauc par **mērinstrumenta pamatkļūdu**. Ja mērinstrumenta pasē nav uzrādīta precizitātes klase vai precizitāte atbilstošā lieluma mērvienībās, tad par mērinstrumenta pamatkļūdu pieņem *pusi no tā skalas sīkākās iedaļas vērtības*. Piemēram, ja skrūves mikrometra sīkākās iedaļas vērtība ir 0,01 mm, tad  $\delta = 0,005$  mm.

Ja mērinstrumentam uzdota *precizitātes klase*  $\gamma$ , tad kļūdu  $\delta$  aprēķina, dalot  $\gamma$  ar 100 un reizinot ar izmantoto mērinstrumenta mērapjomu (ja izmantots ampērmetrs, voltmetrs u.tml.), vai arī reizinot ar mērāmā lieluma vērtību (ja izmantota pretestību magazīna, tehniskais tilts u.tml.).

1. piemērs: voltmetram, kura precizitātes klase  $\gamma=0,5$  un izmantotais mērapjoms ir  $U_0=150\text{ V}$ , mērinstrumenta pamatkļūda

$$\delta = \frac{\gamma}{100} \times U_0, \text{ tātad, } \delta = \frac{\gamma}{100} \times U_0 = \frac{0,5}{100} \times 150(\text{V}) = 0,75(\text{V})$$

jebkurai nolasītajai sprieguma  $U$  vērtībai.

2. piemērs: ja pretestību magazīnas precizitātes klase  $\gamma = 0,2$  un pilnais mērapjoms  $9999,9\ \Omega$ , tad ieslēgtās pretestības vērtībai  $R_1=750\ \Omega$  pamatkļūda

$$\delta_1 = \frac{\gamma}{100} \times R_1, \text{ tātad, } \delta_1 = \frac{\gamma}{100} \times U_0 = \frac{0,2}{100} \times 750(\Omega) = 1,5(\Omega)$$

un citai ieslēgtās pretestības vērtībai  $R_2=7500\ \Omega$  tā ir

$$\delta_2 = \frac{0,2}{100} \times 7500(\Omega) = 15(\Omega).$$

Sistemātisko kļūdu, kas saistīta ar kādu mērāmā objekta īpatnību, sauc par *objekta kļūdu*. Piemēram, nosakot dzelzs blīvumu, ir izmērīta masa un tilpums ķermenim, kura iekšienē ir dobums, bet par tā eksistenci nav zināms, tādēļ iegūtais rezultāts ir kļūdainš. No šādas kļūdas var izvairīties, lietojot citu mērīšanas metodiku. Varētu, piemēram, ķermeni sadalīt sīkās drumslās un drumslu kopējo tilpumu noteikt, izmantojot mērcilindru ar šķidrumu. Tātad, lai novērstu objekta kļūdas, jāizvēlas cita mērīšanas metodika.

Par *gadījuma kļūdu* sauc kopējās kļūdas sastāvdaļu, kuras daudzie cēloņi nav zināmi, bet, vairākkārt atkārtojot mērījumus, mainās kļūdas skaitliskā vērtība un zīme. Gadījuma kļūdas nav iespējams novērst, tās var tikai samazināt un novērtēt to lielumu, izmantojot gadījuma kļūdu teoriju, kas izveidota balstoties uz varbūtību teoriju.

Tātad, gatavojoties veikt mērījumus un mērot:

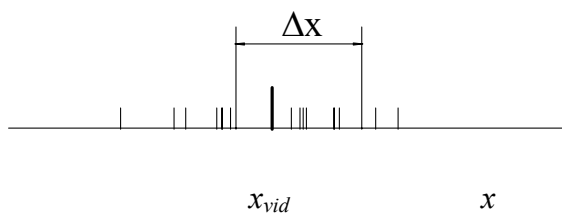
- 1) jāizvēlas piemērota mērīšanas metodika, lai izslēgtu objekta kļūdas;
- 2) jāņem vērā nepieciešamās korekcijas;
- 3) jānovērš rupju kļūdu rašanās, bet, ja tās radušās, tās jāizslēdz, izmantojot atbilstošos kritērijus;
- 4) jānovērtē mērinstrumentu un gadījuma kļūdas.

## 2.1. Nosakāmā lieluma reālā vērtība un ticamības intervāls

Ja nepieciešams noteikt kāda fizikāla lieluma  $x$  vērtību, tad parasti tiek veikti vairāki mērījumi, Praksē ir viegli pārliecināties, ka, mērot ar vienu un to pašu mērinstrumentu (protams, ja tam ir pietiekami augsta precizitāte) vienu un to pašu lielumu vairākas ( $N$ ) reizes, tiek iegūtas atšķirīgas vērtības. Jebkura mērīšanas procesa rezultātā mēs nevaram noteikt kāda fizikāla lieluma *patieso vērtību*  $X$ , tādēļ tās vietā lieto *reālo vērtību*. Par reālo vērtību pieņem visu atsevišķo mērījumu *vidējo aritmētisko vērtību* ( $x_{vid}$ ). Pieņemsim, ka, veicot vairākkārtīgus mērījumus, iegūtas mērāmā lieluma  $x$  vērtības:  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , kuras atšķiras cita no citas gadījuma kļūdu dēļ. Uzskatīsim, ka sistemātiskās kļūdas ir tik mazas, ka tās var neievērot. Tādā gadījumā vidējo vērtību aprēķina šādi:

$$x_{vid} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2)$$

Vidējā vērtība var precīzi nesakrist ne ar vienu atsevišķo mērījumu, bet visas izmērītās vērtības grupējas ap šo lielumu. Pie tam, tuvāk vidējai vērtībai atsevišķo izmērīto vērtību blīvums ir lielāks nekā tālāk no tās. Grafiski šī aina attēlota 1. attēlā.



1. att. Lieluma  $x$  vairākkārtēju mērījumu rezultāti.

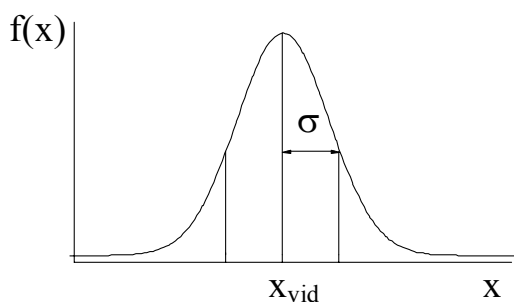
Ja zīmējumā izvēlamies uz vērtību  $x$  ass kādu intervālu  $\Delta x$  un saskaitām, kāds ir punktu (izmērīto vērtību) skaits  $\Delta N$  šajā intervālā, tad varam nodefinēt lielumu

$$\rho = \frac{\Delta N}{\Delta x} \quad (3)$$

kur sauc par punktu blīvumu uz ass. Punktu blīvums uz ass ir lielāks vidējās vērtības tuvumā, bet mazāks tālāk no tās. Pie tam, lielums  $\rho$  ir atkarīgs no mērījumu kopējā skaita  $N$ . Lai iegūtu lielumu, kurš nav atkarīgs no  $N$ , punktu blīvumu  $\rho$  dala ar mērījumu skaitu, un iegūto lielumu sauc par *sadalījuma funkciju*  $f(x)$ .

$$f(x) = \frac{\rho}{N} = \frac{\Delta N}{(\Delta x)N} \quad (4)$$

No varbūtību teorijas izriet, ka sadalījuma funkcijai ir Gausa sadalījuma forma (skat. 2.zīm.).



2. att. Izmērīto vērtību sadalījuma līkne.

Gausa jeb normālsadalījuma līknes maksimums atbilst mērāmā lieluma  $x$  vidējai vērtībai  $x_{vid}$ . Tālāk nodefinēsim lielumu  $\sigma$ , kuru nosauc par *vidējo kvadrātisko novirzi* (jeb *standartnovirzi*). Standartnovirzes kvadrātu  $\sigma^2$  sauc par *dispersiju* un tam spēkā sakarība:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - x_{vid})^2 f(x) dx \quad (5)$$

Vienai standartnovirzei  $\sigma$  atbilstošais apgabals parādīts 2. attēlā (laukums starp divām vertikālajām līnijām). No zīmējuma redzams, ka, ja mēs ņemam vienai standartnovirzei atbilstošo apgabalu ap vidējo vērtību, tad lielākā daļa izmērīto atsevišķo vērtību  $x_i$  (konkrēti – no varbūtību teorijas 68 % jeb 0,68) ietilpst šajā intervālā. 2. attēlā minētais laukums ir skaitliski vienāds ar lieluma  $x_i$  atrašanās varbūtību šajā intervālā. Lietojot kā izkļedes mēru  $\sigma$ , ar 68% varbūtību var rakstīt, ka

$$X - \sigma < x < X + \sigma \quad (6)$$

Tātad, patiesais lielums  $X < x \pm \sigma$ . Intervālu  $(X - \sigma, X + \sigma)$  sauc par *ticamības intervālu*, bet tam atbilstošo varbūtību (šoreiz  $\beta = 0,68$ ) - par *ticamības varbūtību*. Ticamības varbūtību var izvēlēties arī citu. Fizikas laboratorijas darbu aprēķinos tiek ņemta ticamības varbūtība 0,95, kura atbilst divām standartnovirzēm.

Lai novērtētu vidējo kvadrātisko novirzi  $\sigma$  (raksturotu, cik labs tuvinājums patiesajai vērtībai ir aprēķinātā vidējā vērtība), izmanto sakarību, kura iegūta no varbūtību teorijas:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{vid})^2}{N - 1}} \quad (7)$$

## 2.2. Tiešo mērījumu absolūtās un relatīvās kļūdas aprēķins

### Gadījuma kļūdas noteikšana.

Iedomāsimies, ka ir izdarīta nevis viena, bet vairākas mērījumu sērijas, un katrā sērijā ņemti  $N$  mērījumi, pie tam, tādu sēriju skaits ir ļoti liels. Visu sēriju mērījumi kopā ir raksturojami ar kaut kādu sadalījumu, analogisku 2. attēlā parādītajam. Tātad, tiem ir sava standartnovirze  $\sigma$ . Katrai sērijai atsevišķi var aprēķināt savu vidējo lielumu, tā iegūstot vidējo vērtību kopu. Šai vidējo lielumu kopai arī eksistē sava standartnovirze  $\sigma_m$ . Reālā eksperimentā, protams, tiek veikta tikai viena mērījumu sērija, tajā ir  $N$  mērījumi, un ir iegūstama viena vidējā vērtība. Bet mēs gribam pasvītrot, ka ņemtā sērija ir tikai viena no liela skaita iespējamām, bet iegūtā vērtība - tikai viena no pilnās vidējo vērtību kopas. Tādēļ ievied lielumu  $\sigma_m$ , kuru sauc par *vidējās vērtības vidējo kvadrātisko kļūdu* (vai vienkāršāk - par *vidējo kvadrātisko kļūdu*), un kuru ar vidējo kvadrātisko novirzi saista sakarība:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} . \quad (8)$$

$\sigma$ , tātad, ir *atsevišķa mērījuma* vidējā kvadrātiskā kļūda, bet  $\sigma_m$  - *vidējās vērtības* vidējā kvadrātiskā kļūda. Mērījumu apstrādē pieņemts nonoteikt  $\sigma_m$  vērtību, tātad aprēķiniem izmantojamā galīgā formula *vidējās kvadrātiskās kļūdas* ( $s_x$ ) aprēķināšanai, ko iegūstam, apvienojot formulas (7) un (8), ir:

$$s_x = \sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{vid})^2}{N(N-1)}} . \quad (9)$$

Šajā formulā  $x_i$  ir atsevišķu tiešo mērījumu rezultāti,  $x_{vid}$  - šo rezultātu vidējā vērtība,  $N$  - mērījumu skaits.

Lai, izmantojot vidējās kvadrātiskās kļūdas vērtību, iegūtu galīgo mērāmā lieluma  $x$  gadījuma kļūdas vērtību, jāņem vērā arī izraudzītā ticamības intervāla īpašības. To, kāda gadījuma kļūda  $\Delta x_S$  atbilst ticamības varbūtībai  $\beta$ , nosaka, reizinot vidējo kvadrātisko kļūdu ar *Stjudenta koeficientu*  $t_\beta(N)$ , kuru atrod tabulā (skat. Pielikuma 1. tabulu) un kurš ir atkarīgs no izvēlēta ticamības intervāla  $\beta$  un veikto mērījumu skaita  $N$ . Tātad,

$$\Delta x_S = s_x t_\beta(N) . \quad (10)$$

**Sistemātiskās kļūdas noteikšana.**

Lai aprēķinātu *sistemātiskās kļūdas daļu*, kas saistīta ar mērinstrumenta precizitāti, jāizmanto formula

$$\Delta x_{\delta} = \frac{\delta}{3} t_{\beta(\infty)} , \quad (11)$$

šajā formulā  $\Delta x_{\delta}$  - mērinstrumenta kļūda,  $\delta$  - mērinstrumenta pamatkļūda (skat. 8.lpp.),  $t_{\beta(\infty)}$  - Stjudenta koeficients, kas atbilst vēlamajai ticamības varbūtībai  $\beta$  un bezgalīgi lielam mērījumu skaitam. Šāds paņēmieni ir lietojams, jo mērinstrumentu pamatkļūdas trešdaļai atbilst aptuveni tāda pati ticamības varbūtība kā vidējai kvadrātiskajai kļūdai, ja tā aprēķināta bezgalīgi lielam mērījumu skaitam.

**Absolūtās un relatīvās kļūdas vērtību noteikšana.**

Lai uzdotu mērījuma galīgo kļūdu, jānoskaidro, kurš kļūdas veids - mērinstrumenta kļūda vai gadījuma kļūda ir noteicošā konkrētajā mērījumā. Ja viena no kļūdām ir vismaz 3 reizes lielāka par otru, tad par galīgo mērījumu kļūdu  $\Delta x$  uzdod lielākās kļūdas vērtību. Tātad,

$$\text{ja } \Delta x_S \gg \Delta x_{\delta} \text{ tad } \Delta x = \Delta x_S;$$

$$\text{ja } \Delta x_S \ll \Delta x_{\delta} \text{ tad } \Delta x = \Delta x_{\delta}.$$

Kļūdas, kuras aprēķinātas pēc minētajām formulām un kuras tiek mērītas tajās pašās vienībās kā apskatāmais lielums, sauc arī par **absolūtajām kļūdām** ( $\Delta x$ ). Mērījumu precizitātes raksturošanai izmanto **relatīvās kļūdas** ( $\varepsilon$ ), kuras izsaka procentos un aprēķina pēc formulas

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{vid}} 100\% \quad (12)$$

Relatīvās kļūdas vērtībai vienmēr jābūt mazākai par 100 %. Jo šī kļūda mazāka, jo precīzāk veikti mērījumi.

**2.3. Rezultātu, kas satur rupju kļūdu, izslēgšana**

To mērījumu vērtības, kas satur rupju kļūdu, parasti stipri atšķiras no visiem pārējiem mērījumiem. Lai pārbaudītu, vai rezultāts tiešām ir ar rupju kļūdu, izmanto sekojošu matemātisku kritēriju:

$$\frac{|x^* - x_{vid}|}{s_x(N)} > \tau_{\beta(N)} , \quad (13)$$

kur  $x^*$  - aizdomīgais rezultāts,  $\tau_\beta(N)$  -  $\tau$  sadalījuma koeficients, kurš atkarīgs no mērījumu skaita  $N$ ,  $s_x$  - vidējā kvadrātiskā kļūda.  $\tau$  sadalījuma koeficientu vērtības pie dažādām ticamības varbūtībām atrodamas pielikuma 2. tabulā. Ja izteiksmes (13) kreisā puse ir lielāka par  $\tau_\beta(N)$ , tad aizdomīgais rezultāts satur rupju kļūdu un ir izslēdzams no aprēķiniem. Tātad, arī vidējo vērtību aprēķinot, šo rezultātu neņem vērā, un ir jāpārrēķina iepriekš iegūtā vidējā vērtība, kurā tika izmantots kļūdainais rezultāts.

**Piemērs: 7 reizes mērot, iegūtas sekojošas mērāma lieluma  $x$  vērtības:**

Nr.	$x_i \pm \delta x$ , cm
1.	14,85 ± 0,01
2.	14,80
3.	17,83
4.	14,81
5.	14,79
6.	14,84
7.	14,83

- 1) Ja no šiem rezultātiem aprēķina vidējo vērtību, iegūst  $x_{vid} = 15,25$  (formula (2)) un vidējo kvadrātisko kļūdu  $s_x = 0,43$  (formula (9)). Apskatot rezultātus, šķiet, ka 3. rezultāts varētu būt ar rupju kļūdu. Tātad, pārbaudām, vai izpildās formula (13):

$$\frac{|17,83 - 15,25|}{0,43} ? > ? \tau_\beta(n)$$

Aprēķinot kreisās puses vērtību, iegūstam 6,0. No pielikuma 2. tabulas atrodam, ka 7 mērījumu gadījumā pie ticamības varbūtības  $\beta = 0,95$   $\tau_\beta(N) = 2,09$ , tātad,  $6,0 > 2,09$ , nevienādība (13) izpildās, un aizdomīgais rezultāts 17,83 satur rupju kļūdu un tālākiem aprēķiniem nav izmantojams.

- 2) rezultātu, kas satur rupju kļūdu, atmet un rēķina jaunu vidējo vērtību no 6 atlikušajiem mērījumu rezultātiem. Iegūst  $x_{vid} = 14,82$  un  $s_x = 0,009661$  jeb  $9,661 \times 10^{-3}$ .
- 3) lai aprēķinātu mērāmā lieluma gadījuma kļūdu (formula (10))  $\Delta x_s$ , vidējā kvadrātiskā kļūda  $s_x$  jāpareizina ar Stjūdenta koeficientu 6 mērījumiem:  $t_\beta(6) = 2,57$ . Iegūstam rezultātu:  $\Delta x_s = 0,02483$ .
- 4) aprēķina sistemātisko kļūdu pēc formulas (11):  $\Delta x_s = (0,01 / 3) \times 1,96 = 0,00653$
- 5) salīdzina gadījuma kļūdas  $\Delta x_s$  un sistemātiskās kļūdas  $\Delta x_s$  vērtības un iegūst, ka gadījuma kļūda ir vismaz trīs reizes lielāka par sistemātisko kļūdu, tātad, tā jāuzdod kā mērījuma absolūtā kļūda  $\Delta x = 0,02483$ .

6) aprēķina relatīvo kļūdu, izmantojot formulu (12). Iegūst vērtību  $\varepsilon = 0,1675\%$ .

**Mērījumu rezultātus pieraksta šādi:**

$$x = (x_{vid} \pm \Delta x) \text{ mērvienības, } \varepsilon = \dots \% \text{ pie } \beta = 0,95.$$

Piemēram:

$$x = (14,820 \pm 0,025) \text{ cm, } \varepsilon = 0,17\% \text{ pie } \beta = 0,95.$$

Rezultāts pierakstot ir noapaļots, izmantojot noapaļošanas likumus, kuri būs aprakstīti turpmāk.

## 2.4. Kļūdu aprēķins netiešajos mērījumos

Lielāko daļu eksperimentāli iegūto rezultātu iegūst netiešajos mērījumos, tātad, aprēķinot ar dažādu formulu palīdzību.

Pieņemsim, ka lielumu  $y$  var aprēķināt, izmantojot formulu

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (14)$$

kur lielumi  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ir tiešo mērījumu rezultāti un  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$  - to kļūdas. Gan tiešo mērījumu rezultāti, gan to kļūdas ir noteiktas iepriekš. Visām kļūdām jābūt noteiktām ar vienādu ticamības varbūtību  $\beta$ .

Lieluma  $y$  izmaiņu  $\Delta y_i$ , kuru izraisa argumenta  $x_i$  izmaiņa, gadījumā, kad visi pārējie argumenti nemainās, sauc par *parciālo kļūdu*. No visām parciālajām kļūdām kopā veidojas lieluma  $y$  kopējā kļūda  $\Delta y$ , ko aprēķina, izmantojot kļūdu saskaitīšanas likumu:

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \dots + (\Delta y_k)^2} \quad (15)$$

Jāaprēķina arī relatīvā kļūda:

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{y} \times 100\% \quad (16)$$

Parciālo kļūdu saskaitīšanas likums ir spēkā tikai tad, ja parciālās kļūdas ir mazas.

Parciālo kļūdu noteikšanai var izmantot vairākus paņēmienus: *ievietošanas paņēmieni*, *parciālās atvasināšanas paņēmieni* vai *relatīvo kļūdu metodi*. Ar visām šīm metodēm var iepazīties grāmatās, kas veltītas kļūdu teorijai, bet šeit tuvāk apskatīsim parciālās atvasināšanas paņēmieni kļūdu noteikšanai netiešajos mērījumos.

Ja atvasina izteiksmi (14) pēc argumenta  $x_i$ , pārējos argumentus uzskatot par konstantēm, iegūst parciālo atvasinājumu  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ .

Pēc būtības šis atvasinājums ir lieluma  $y$  pieauguma  $\Delta y$  attiecība pret argumenta  $x_i$  pieaugumu  $\Delta x_i$ , kas izraisījis šo funkcijas  $y$  izmaiņu. Tas nozīmē, ka parciālais atvasinājums rāda, par cik pieaug lielums  $y$ , ja arguments  $x_i$  pieaug par vienu vienību. Nav grūti saprast, ka parciālā kļūda  $\Delta y_i$ , kas ir lieluma  $y$  izmaiņa, kuru izraisa argumenta  $x_i$  izmaiņa par tā kļūdu  $\Delta x_i$ , atrodama šādi:

$$\Delta y_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i, \quad (17)$$

ja pieņem, ka vērtības  $x_i$  tuvumā, argumentam  $x_i$  mainoties par  $\Delta x_i$ , funkciju  $f(x_i)$  var attēlot ar taisnes nogriezni. Tāpēc formula (17) ir pareiza tikai mazām kļūdām  $\Delta x_i$ , ja funkcija (14) nav lineāra argumenta  $x_i$  funkcija.

Veicot parciālo atvasināšanu pēc visiem funkcijas  $y$  argumentiem  $x_i$ , kļūdas aprēķināšanai iegūstam sakarību

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2} \quad (18)$$

Parciālās atvasināšanas paņēmiens principā ir derīgs visām funkcijām neatkarīgi no to veida. Jāievēro, ka kļūdas aprēķina formula atšķiras no paša lieluma aprēķina formulas.

### 3. Aprēķināto vērtību noapaļošana

#### 3.1. Darbības ar aptuveniem skaitļiem

Praktiski visi aprēķini fizikā tiek veikti, izmantojot aptuvenus skaitļus. Tāpēc jāprot pareizi rīkoties ar tiem.

*Cipari un skaitļi.* Atgādinām, ka jebkuru skaitli var uzrakstīt ar desmit ciparu (0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9) kombināciju. Cipara stāvoklis skaitlī nosaka šķiru un vienību skaitu, kurš tam atbilst. Veselu skaitļu šķiras tiek skaitītas no komata pa kreisi: 1. šķira - vieni, 2. šķira - desmiti, 3. šķira - simti utt. Decimāldaļu šķiras skaita no komata pa labi: 1. šķira - desmitdaļas, 2. šķira - simtdaļas, utt. Jo vairāk pa kreisi atrodas cipars, jo augstāka tā šķira.

*Zīmīgie un nezīmīgie cipari.* Par *nezīmīgiem* cipariem sauc visas nulles skaitļa sākumā, kas nosaka decimāldaļas šķiru.

Par *pirmo zīmīgo ciparu* sauc pirmo no nulles atšķirīgo ciparu, kas sastopams skaitlī, ejot no kreisās uz labo pusi. Visi pa labi no pirmā zīmīgā atrodošies cipari, ieskaitot pirmo, ir zīmīgie cipari. Nulles cipari skaitļa vidū vai beigās arī ir zīmīgie cipari.

*Skaitļu noapaļošana.* Veicot darbības ar aptuveniem skaitļiem, daļu ciparu lietderīgi atņemt to neprecizitātes un skaitļošanas atvieglošanas dēļ. Šāda veida operācija tiek saukta par *noapaļošanu* un pakļaujas sekojošam likumam:

*lai noapaļotu skaitli līdz  $n$  zīmīgiem cipariem, atmet visus ciparus, kas atrodas pa labi no  $n$ -tā zīmīgā, ievērojot: ja pirmais pa kreisi atmestais cipars ir lielāks vai vienāds ar 5, tad pēdējo palikušo palielina par vienu vienību.*

Redzams, - ja izpildām šo noapaļošanas likumu, tad noapaļošanas robežklūda vienāda ar pēdējā saglabātā cipara vienības vērtības pusi.

Ja skaitļa absolūtā robežklūda ir mazāka par kāda cipara vienības vērtības pusi, tad šo ciparu sauc par *pareizu (drošu)*. Visi pārējie pa kreisi no pareizā atrodošies cipari arī ir pareizi. Pirmais pa labi aiz pēdējā pareizā cipara atrodošais cipars tiek saukts par *nedrošu*, bet visi aiz tā pa labi - par *nepareiziem (kļūdainiem)*.

Ja absolūtā robežklūda netiek uzrādīta, tad uzskata, ka pēdējais pa labi cipars ir pareizs.

Jāievēro, ka visi aprēķini ar aptuveniem skaitļiem jāveic tā, lai nesamazinātu eksperimenta precizitāti. Tas būs spēkā, ja starppaprēķinos izmanto arī nedrošus ciparus, bet noapaļošanu izdara galīgajā rezultātā.

### 3.2. Noapaļošanas nosacījumi

Kļūdas arī ir pieskaitāmas pie aptuveniem skaitļiem, tādēļ viss minētais par darbībām ar aptuveniem skaitļiem ir attiecināms arī uz kļūdām. Praktiski kļūdas sastāda 1 - 10 % no rezultāta, t.i., tā simtdaļas vai desmitdaļas. Tas nozīmē, ka kļūdas kļūda iespaidos rezultātu par tā tūkstošdaļu vai simtdaļu. Tāpēc vairumā gadījumu pietiek ar kļūdu noapaļošanu līdz ~ 10 %, t.i., līdz ***diviem zīmīgiem (drošiem!) cipariem***. Minētais nosacījums nav likums, bet ieteicams vairumam praktisku gadījumu. Ja nepieciešams precīzāk uzrādīt kļūdu, tad to noapaļo līdz pēdējam pareizajam ciparam.

Novērtējot galīgo rezultātu, jāvadās pēc šāda likuma:

***vispirms jānoapaļo kļūda, un tikai pēc tam rezultāts līdz tai pašai ciparu šķirai, kāda ir atstāta kļūdai.***

*Piemērs.*

Mērījumos iegūts galīgais rezultāts  $x = 99,323$  un tā kļūda  $s_{x.t\beta}(n) = 0,2231$ , kur pasvītrotais cipars ir pēdējais drošais. Pareizi ir sekojoši noapaļojumi:

$$x = 99,323 \pm 0,223$$

$$x = 99,32 \pm 0,22$$

$$x = 99,3 \pm 0,2$$

Visi trīs pieraksti ir pareizi un atšķiras ar pieraksta precizitāti. ***Pierakstot gala rezultātu fizikas laboratorijas darbā, pieņemts vidējais noapaļojuma veids – atstājot kļūdai 2 zīmīgos ciparus un pēc tam atbilstoši apaļojot rezultātu līdz tai pašai šķirai.***

#### 4. Grafiku zīmēšana

Viena fizikāla lieluma funkcionālu atkarību no otra, piemēram, metāla vadītāja (rezistora) elektriskās pretestības atkarību no temperatūras, uzskatāmi var parādīt, izmantojot grafiku. ***Grafikus zīmē uz milimetru papīra vai izmantojot datoru***, parasti izmantojot taisnleņķa koordinātes, bet dažreiz arī polārās koordinātes. *Neatkarīgo mainīgo (argumentu) atliek uz taisnleņķa koordinātu sistēmas horizontālās (abscisu) ass, bet atkarīgo lielumu (funkciju) - uz vertikālās (ordinātu) ass.*

Pirms grafika konstruēšanas uz koordinātu asīm atliek vienmērīgi un ne pārāk bieži izvietotas mēroga iedaļas, pierakstot pie tām skaitliskās vērtības, bet pie koordinātu asu galiem atzīmē atliekamo lielumu apzīmējumus un mērvienības (tos atdala ar komatu).

Mērogi uz asīm jāizvēlas saprātīgi un neatkarīgi viens no otra, ņemot vērā atliekamo lielumu intervālu un raugoties, lai

1) grafiks nebūtu pārāk izstiepts vai saspiegts pa vienu no asīm,

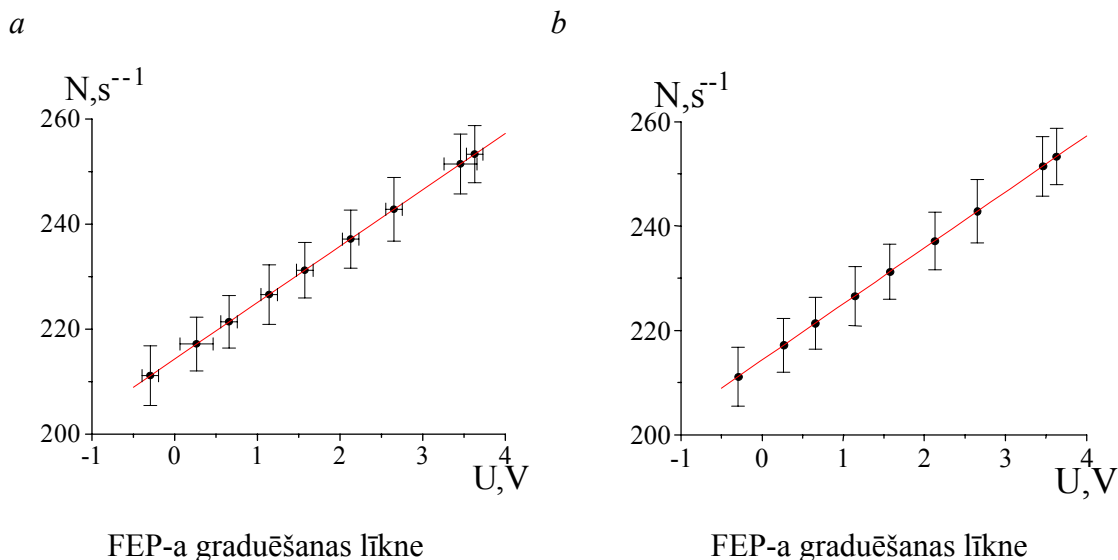
2) būtu ērti atliekamas lielumu vērtības, kuras atrodas starp divām uz ass atzīmētajām iedaļām.

Jāizvairās atlikt, piemēram, 3, 7, 6, 8 vai 9 vienības uz 5 mm vai 10 mm gara ass nogriežņa. Ja argumenta vai funkcijas mazākās vērtības ir tālu no nulles, tad uz atbilstošās ass atskaite jāsāk nevis no nulles, bet no vērtības, kura ir tikai nedaudz mazāka par atliekamā lieluma mazāko vērtību. ***Grafika izmēriem (ne asu) jābūt ne mazākiem par 10 × 10 cm.***

Katram saistītu argumenta un funkcijas vērtību pārim atbilst viens punkts uz grafika. To atliek, izmantojot koordinātu tīklu, bet neatzīmējot argumenta un funkcijas vērtības uz asīm. Ap katru grafika punktu iezīmē *kļūdu taisnstūri*. Taisnstūra katras malas garums ir vienāds ar divkārtu atbilstošā lieluma absolūto kļūdu. Ja argumenta kļūda ir ļoti maza, kļūdu taisnstūris pārvēršas par *kļūdu nogriezni*, kura galus norobežo ar īsām nogriežņiem perpendikulārām svītriņām. Līkne uz grafika jāizvelk caur kļūdu laukumiem (vai nogriežņiem) pēc iespējas tuvāk eksperimentālajiem punktiem.

Bez tam, līknei jābūt gludai, bez lūzumiem, ja tiem nav papildu eksperimentālo pierādījumu. Zem vai virs grafika pieraksta tā nosaukumu.

Grafiks jāzīmē darba aprakstā vajadzīgajā vietā, līdzīgi tam, kā izvietoti attēlus žurnālos un grāmatās. Grafika piemērs dots 3. zīmējumā.



3. zīm. Grafika zīmēšanas piemērs:

*a* - kļūdu intervāli atlikti argumentam un funkcijas vērtībai;

*b* - kļūdu intervāli atlikti tikai funkcijas vērtībai

(gadījums, kad argumenta kļūda izvēlētajā mērogā ir maza).

## 5. Rezultātu apstrādes secība.

### 5.1. Tiešie mērījumi.

1. Katra mērījuma rezultātus ieraksta tabulā.
2. No visiem  $N$  mērījumiem aprēķina vidējo aritmētisko vērtību (formula (2)).
3. Aprēķina vidējo kvadrātisko kļūdu (formula (9), izmantojot kalkulatora funkcijas - jāievēro formulas (7) un (8)).
4. Ja kāda mērījuma vērtība ievērojami atšķiras no citām, to pārbauda ar kritēriju (13) - vai nav pielaista rupja kļūda. Ja aizdomīgā vērtība ir ar rupju kļūdu, to izslēdz un atkārtoti 1. - 3. punktā minētos aprēķinus, izslēdzot šo vērtību.
5. Izvēlas ticamības varbūtības vērtību  $\beta$  (fizikas laboratorijas darbos parasti ņem  $\beta = 0,95$ ).

6. No pielikumā dotajām tabulām pie izvēlētās  $\beta$  vērtības un veiktā mērījumu skaita atrod Stjūdentā koeficienta vērtību  $t_{\beta}(N)$ .
7. Aprēķina ticamības intervāla robežas (gadījuma kļūdu) pēc formulas (10).
8. Novērtē sistemātisko kļūdu, izmantojot sakarību (11). Salīdzina gadījuma kļūdas un sistemātiskās kļūdas vērtības. Kā galīgo mērījumu absolūto kļūdu  $\Delta x$  uzdod lielāko no šīm kļūdām.
9. Aprēķina rezultāta relatīvo kļūdu  $\varepsilon$  pēc formulas (12).
10. Galīgo rezultātu pieraksta formā

$$x = (x_{vid} \pm \Delta x) \text{ mērvienības, } \varepsilon = \dots \% \text{ pie } \beta = 0,95$$

Pierakstot ņem vērā noapaļošanas likumus.

11. Ja nepieciešams, zīmē sakarību grafikus (skat. 4. nodaļu: Grafiku zīmēšana).
12. Izanalizē rezultātus un izdara secinājumus.

## 5.2. Netiešie mērījumi.

1. Pētāmā lieluma katra argumenta mērījumu sērija tiek apstrādāta, kā aprakstīts 5.1. nodaļas 1.-9. punktā. Pie tam, visiem argumentiem jāizvēlas viens un tas pats ticamības intervāls  $\beta$ .
2. Pēc formulas (14) aprēķina nosakāmā lieluma  $y$  vērtību, argumentu  $x_i$  vietā liekot to vidējās vērtības.
3. Atrod nosakāmā lieluma kļūdas izteiksmi saskaņā ar sakarību (15) vai (18) un aprēķina kļūdas skaitlisko vērtību.
4. Aprēķina rezultāta relatīvo kļūdu saskaņā ar formulu (16).
5. Pieraksta galīgo rezultātu tādā pašā formā, kā tas darīts tiešo mērījumu gadījumā (5.1. nodaļas 10. punkts).
6. Ja nepieciešams, zīmē sakarību grafikus.
7. Izanalizē rezultātus un izdara secinājumus.

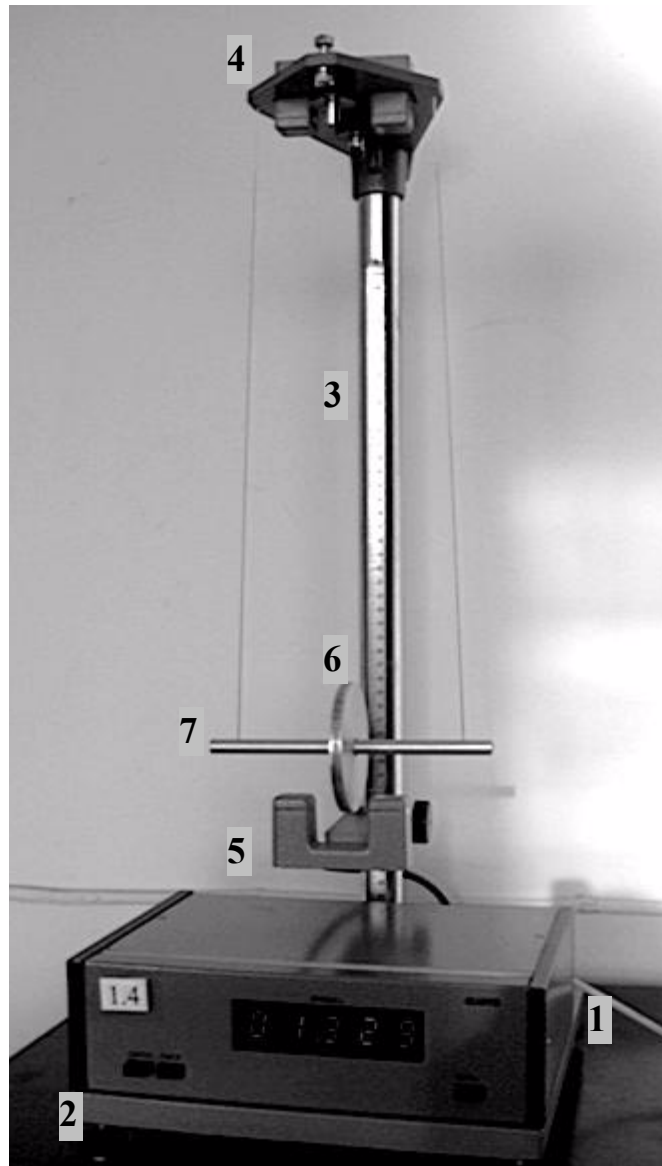
### 1.4. Inerces momenta noteikšana, izmantojot Maksvela svārstu

Maksvela svārsts ir disks, kas ar savu asi iekārts bifilārā (divu auklu) iekarē. Svārstam pārvietojoties, novērojam saliktu kustību, kas sastāv no divām vienkāršākām: virzes kustības un rotācijas kustības. Kinemātiskas vai dinamiskas dabas lielumi šajā saliktajā kustībā ir vektoriāla vai skalāra summa no lieluma virzes kustībā un lieluma rotācijas kustībā. Tā, piemēram, pilnā kinētiskā enerģija  $W_k$  Maksvela svārstam ir kinētiskā enerģija virzes kustībā

$$W_{kv} = \frac{Mv^2}{2} \quad \text{un} \quad \text{rotācijas kustībā}$$

$$W_{kr} = \frac{I\omega^2}{2}. \quad \text{Redzam analogiju starp}$$

abām minētajām izteiksmēm, kur analogiskie lielumi  $M \leftrightarrow I$  un  $v \leftrightarrow \omega$ . To pašu varētu teikt arī par atsevišķu punktu ātrumu vai paātrinājumu. Skaidrs, ka šie lielumi ir vektoriāli. Tātad, ar Maksvela svārstu pētām saliktu kustību. Ja izmēram laiku  $t$ , kurā tas veic augstumu  $h$ , varam noteikt Maksvela svārsta inerces momentu. Laboratorijas darba iekārta redzama 1.6. attēlā. Tā novietota uz pamatnes (1), kuru horizontālā stāvoklī nostāda ar regulējamām skrūvēm (2) un sfērisku līmeņrādi. Pamatne savienota ar vertikālu stieni (3), kuram piestiprināts augšējais kronšteins (4). Augšējā kronšteinā atrodas elektromagnēts, fotoelektriskais elements un iekārta svārsta bifilārās iekares garuma regulēšanai. Arī apakšējā kronšteinā (5) atrodas fotoelektriskais elements, kuru kopā ar kronšteinu varam pārvietot vertikālajā virzienā pa stieni (3). Maksvela svārsts ar disku (6) un asi (7) bifilāri piestiprināts pie augšējā kronšteina. Uz diska varam



1.6. att. Maksvela svārsta iekārta.

regulējamām skrūvēm (2) un sfērisku līmeņrādi. Pamatne savienota ar vertikālu stieni (3), kuram piestiprināts augšējais kronšteins (4). Augšējā kronšteinā atrodas elektromagnēts, fotoelektriskais elements un iekārta svārsta bifilārās iekares garuma regulēšanai. Arī apakšējā kronšteinā (5) atrodas fotoelektriskais elements, kuru kopā ar kronšteinu varam pārvietot vertikālajā virzienā pa stieni (3). Maksvela svārsts ar disku (6) un asi (7) bifilāri piestiprināts pie augšējā kronšteina. Uz diska varam

uzlikt dažādas masas gredzenus. Augšējā stāvoklī disku notur elektromagnēts. Laiku, kurā Maksvela svārsts veic augstumu  $h$ , nosakām ar milihronometru.

Iekārtas matemātiskais modelis. Maksvela svārsta masa  $m$  sastāv no diska masas  $M_d$ , diska ass masas  $M_a$  un uz diska uzliktā gredzena masas  $M_g$ .  $M = M_d + M_a + M_g$ . Tāpat Maksvela svārsta inerces moments  $I = I_d + I_a + I_g$ . No II Ņūtona likuma virzes un rotācijas kustībai var rakstīt:

$$Ma = Mg - T$$

$$I\varepsilon = Tr,$$

kur  $r$  – diska ass rādiuss.

Sakarība starp leņķisko un lineāro paātrinājumu ir

$$\varepsilon r = a.$$

Līdz ar to mūsu rīcībā ir trīs vienādojumi trīs nezināmo  $T$ ,  $a$  un  $\square$  aprēķinam. Atrodam  $a$ :

$$a = \frac{Mr^2}{Mr^2 + I} g$$

Maksvela svārsta smaguma centra kustība ir vienmērīgi paātrināta, tātad

$$h = \frac{at^2}{2} \quad \text{jeb} \quad a = \frac{2h}{t^2}.$$

Pielīdzinot abas  $a$  aprēķina izteiksmes, iegūstam

$$\frac{2h}{t^2} (Mr^2 + I) = Mr^2 g$$

un mūsu rīcībā ir izteiksme Maksvela svārsta  $I$  aprēķinam

$$I = Mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (1.10)$$

*Darba uzdevumi:*

1. Noteikt Maksvela svārsta inerces momentu  $I$ , izmantojot sakarību (1.10), laiku mērot ne mazāk kā 5 reizes katrai augstuma  $h$  vērtībai, bet  $r$  mērīt vairākas reizes dažādās ass vietās.
2. Noteikt dotā gredzena inerces momentu  $I_g$  un salīdzināt ar teorētiski aprēķināto.

Šim nolūkam veicam eksperimentu ar gredzenu un bez tā.

Veicot eksperimentu ar gredzenu, iegūstam Maksvela svārsta (disks + ass) un gredzena kopējo inerces momentu  $I_{kop}$ .

$$I_{kop} = I_g + I = (M_g + M)r^2 \left( \frac{gt_1^2}{2h_1} - 1 \right) \quad (1.11)$$

Bez gredzena

$$I = Mr^2 \left( \frac{gt_2^2}{2h_2} - 1 \right) \quad (1.12)$$

No izteiksmes (1.11) atņemot (1.12), iegūstam:

$$I_g = I_{kop} - I = (M_g + M)r^2 \left( \frac{gt_1^2}{2h_1} - 1 \right) - Mr^2 \left( \frac{gt_2^2}{2h} - 1 \right) \quad (1.13)$$

Ar mikrometru vairākās ass vietās izmēra ass rādiusu. Veic vairākus laika  $t_1$  mērījumus (iekārtai ar gredzenu) un vairākus  $t_2$  mērījumus (iekārtai bez gredzena). Mērījumus var veikt vairākām vai vienai augstuma  $h$  vērtībai. Izmantojot formulu (1.13) nosaka eksperimentālo inerces momenta vērtību gredzenam.

Teorētiski inerces momentu gredzenam aprēķina, izmantojot formulu

$$I_g = \frac{M_g}{8} (D_1^2 + D_2^2),$$

kur  $D_1$  - gredzena iekšējais diametrs,  $D_2$  - ārējais diametrs.

#### *Darba gaita:*

1. Nostāda pamatni (1) horizontālā stāvoklī ar regulējamām skrūvēm.
2. Iestāda iekārtas apakšējo kronšteinu, lai augstums  $h$  atbilstu izvēlētajai vērtībai.
3. Pieslēdz iekārtu elektriskajam tīklam, uzspiežot taustiņu “сеть”.
4. Ja nepieciešams, uz Maksvela svārsta diska uzliek vajadzīgo gredzenu.
5. Uztin iekares auklas uz Maksvela svārsta diska ass līdz augšējam stāvoklim. Šajā stāvoklī asi nofiksē augšējā kronšteina elektromagnēts.
6. Nospiež taustiņu “пуск”.
7. Nolasa svārsta krišanas laiku.
8. Nospiež taustiņu “сброс” un, ja nepieciešams, mērījumus atkārto.

### 1.5. Rotācijas kustības pētīšana ar Oberbeka iekārtu

Rotācijas kustībai tehnikā ir ļoti liela nozīme, jo jebkuru komplicētu kustību var uzskatīt kā sastāvošu no dotā ķermeņa smaguma centra virzes kustības un rotācijas kustības ap ķermeņa smaguma centru.

Rotācijas kustības dinamikas pamatvienādojumu izsaka formula:

$$M = I\varepsilon \quad (1.14)$$

kur  $M$  - spēka moments,  $I$  - inerces moments,  $\varepsilon$  - leņķiskais paātrinājums.

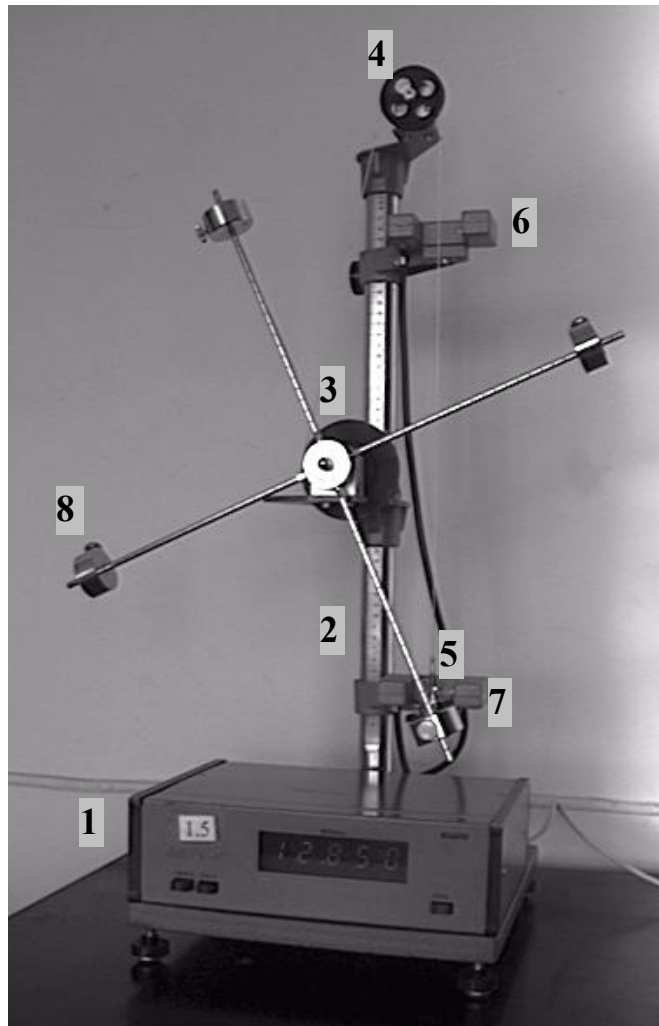
Tāpat kā virzes kustības gadījumā masa nosaka kustīgās sistēmas inerci (II Ņūtona likums), tā rotācijas gadījumā rotējošās sistēmas inerci nosaka inerces moments  $I$ , kas raksturo masas sadalījumu ap rotācijas asi (inerces moments materiālam punktam

$I = mR^2$ ). Tātad, viena un tā pati masa, novietota dažādos attālumos no rotācijas ass, rada dažādus inerces momentus.

Rotācijas kustības pētīšanai var izmantot Oberbeka iekārtu, kura parādīta 1.7. attēlā.

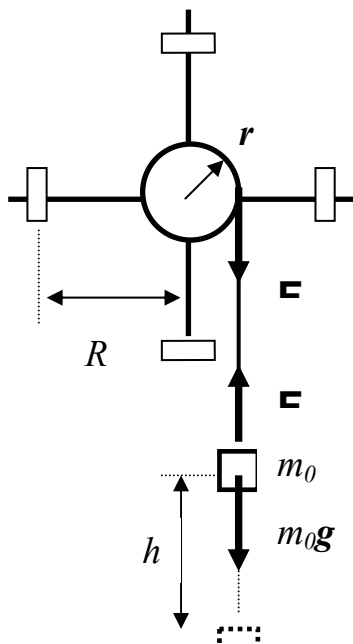
Uz statīva pamatnes (1) nostiprināts vertikāls stienis ar lineālu (2). Stieņa vidū nostiprināts divpakāpju rotējošs skriemelis (3) ar 4 stieņiem. Stieņa (2) augšgalā nostiprināts trīsis (4).

Uz skriemeļa (3) uzfīta aukla, kura pārlikta pār trīsi un tās galā piestiprināti atsvari (5). Uz stieņa (2) nostiprināti divi kronšteini: augšējais - kustīgais (6) un apakšējais - nekustīgais (7), kuri apgādāti ar fotoelementiem atsvaru krišanas laika un augstuma fiksēšanai. Uz skriemeļa stieņiem dažādos attālumos no rotācijas centra var novietot četrus papildus atsvarus (8). Uz statīva pamatnes novietota vadības iekārta ar trim slēdžiem. Ar slēdzi "сеть" ieslēdz iekārtu, ar slēdzi "пуск" atbrīvo atsvaru un ieslēdz hronometru, ar slēdzi "сброс" nodzēš hronometra rādījumus. Pamatnes kājiņas ir regulējamas.



1.7. att. Oberbeka iekārta.

1.8. attēlā parādīts iekārtas matemātiskais modelis. Uz rotējošā skriemeļa ar rādiusu  $r$  uzlīta aukla, kuras galā piesiets atsvars  $m_0$ . Tiek pieņemts, ka auklas masa ir neievērojami maza, atsvara kustībai nav gaisa pretestības, skriemelis rotē bez berzes.



1.8.att. Oberbēka iekārtas matemātiskais modelis.

Ja atsvaru atbrīvo, tas krīt ar paātrinājumu  $a$  un rada diega sastiepuma spēku:

$$F = m_0(g - a) \quad (1.15)$$

Spēks  $F$  rada griezes momentu  $M$ , kurš saskaņā ar (1.15) ir:

$$M = Fr = m_0(g - a)r = I\varepsilon \quad (1.16)$$

No šīs formulas izsaka inerces momentu:

$$I = \frac{m_0(g - a)r}{\varepsilon}$$

lineāro un leņķisko paātrinājumu saista sakarība:

$$\varepsilon = \frac{a}{r}$$

bet lineāro paātrinājumu var noteikt, zinot atsvara krišanas augstumu  $h$  un krišanas laiku  $t$

$$a = \frac{2h}{t^2} \quad (1.19)$$

Sakarības (1.18) un (1.19) ievietojot vienādojumā (1.17), iegūst

$$I = m_0 r^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \quad (1.20)$$

Ja uz stieņiem nav uzlikti papildus atsvari, tad sakarība (1.20) apraksta sistēmas inerces momentu  $I_0$ , ja uzlikti atsvari, tad iegūstam sistēmas un atsvaru kopējo inerces momentu  $I$ , kuru var izmainīt, novietojot atsvarus dažādā attālumā  $R$  no rotācijas ass. Sakarība (1.20) ir pareiza, ja sistēmā nav berzes. Ja darbojas berzes spēki un izmanto divu dažādu rādiusu skriemeļus, var uzrakstīt šādu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{aligned} Fr_1 - M_b &= I\varepsilon_1 \\ Fr_2 - M_b &= I\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

kur  $M_b$  - berzes spēku moments, bet  $r_1$  un  $r_2$  - skriemeļu rādiusi. Atrisinot šo vienādojumu sistēmu attiecībā pret  $I$  un ievērojot (1.18) un (1.19), iegūst:

$$I = \frac{m_0 \left( \left( g - \frac{2h_1}{t_1^2} \right) r_1 - \left( g - \frac{2h_2}{t_2^2} \right) r_2 \right)}{\frac{2h_1}{r_1 t_1^2} - \frac{2h_2}{r_2 t_2^2}} \quad (1.22)$$

Ja uz stieņiem ir simetriski novietoti četri vienādi atsvari, tad var noteikt katra atsvara inerces momentu attiecībā pret rotācijas asi

$$I_k = \frac{I - I_0}{4} \quad (1.23)$$

*Darba uzdevumi:*

1. Noteikt sistēmas inerces momentu  $I_0$ .
2. Noteikt sistēmas un atsvaru inerces momenta atkarību no atsvaru novietojuma.
3. Noteikt viena atsvara inerces momenta atkarību no novietojuma.
4. Pārbaudīt rotācijas kustības dinamikas pamatvienādojumu (1.14).

*Darba gaita.*

1. Ar regulējamo kājiņu palīdzību nostādīt stieni (2) vertikāli.
2. Pārbaudīt, vai atsvars (5) brīvi iziet caur kronšteinu (6) un (7).
3. Nostādīt kronšteinu (8) izvēlētajā augstumā  $h$ .
4. Vienā kārtā uzlīmēt diegu uz skriemeļa (3) tā, lai atsvara (5) apakša sakristu ar horizontālo svītru kronšteinā (6) un, skriemeli pieturot, nospiež slēdzi “сеть”. Pārbaudīt, vai iedegas spuldzītes abos kronšteinos (6) un (7) un ir apgaismota hronometra skala un atsvars (5) ir nobremzēts.
5. Nospiež slēdzi “пуск”.
6. Nolasīt hronometra rādījumus.
7. Nospiež slēdzi “сброс” un atkal uzlīmēt auklu uz skriemeļa mērījumu atkārtošanai un atbrīvot slēdzi “пуск”.

Katrā eksperimentā mērījumus atkārtot vairākas reizes.

## 1.6. Ķermeņa kustības ātruma noteikšana

### 1.6.1. Lodītes kustības ātruma noteikšana ar ballistisko svārstu

Dažādos ķermeņa kustības gadījumos, piemēram, ķermeņa brīvās krišanas, izšautas lodes kustības un citos, ķermeņa kustības ātrums nav vienmērīgs. Ķermeņa momentānā ātruma noteikšanai izmanto ballistisko svārstu.

Ballistiskā svārsta pamatelements ir metāla rāmītis, kas piekārts četros vienāda garuma  $l$  diegos. Tāds iekāršanas paņēmieni izslēdz ballistiskā svārsta rotācijas kustību un tādējādi vienkāršo tālākos aprēķinus. Svārsta rāmītim ir konusveida satvērējs, kurā kustīgā lodīte trieciena momentā iesprūst, atdodot savu kinētisko enerģiju ballistiskajam svārstam.

Apļukosim impulsa nezūdamības likumu sistēmai: lodīte - ballistiskā svārsta rāmītis. Apzīmēsim lodītes masu ar  $m_l$ , lodītes ātrumu sadursmes momentā ar  $v_l$ , ballistiskā svārsta rāmīša masu ar  $m_r$ , bet rāmīša un lodītes ātrumu pēc sadursmes ar  $v_2$ . Tad, pamatojoties uz impulsa nezūdamības likumu, var rakstīt, ka

$$m_l v_l = (m_r + m_l) v_2$$

Tātad, lodītes ātrums tieši pirms sadursmes ir šāds:

$$v_l = \left(1 + \frac{m_r}{m_l}\right) v_2 \quad (1.24)$$

Rāmīša un lodītes kopējo ātrumu var aprēķināt, izmantojot enerģijas nezūdamības likumu:

$$(m_l + m_r)gh = \frac{(m_l + m_r)v_2^2}{2}$$

vai  $v_2 = \sqrt{2gh}$ , kur  $g$  - smaguma spēka paātrinājums,  $h$  - ballistiskā svārsta rāmīša pacelšanās augstums.

Ātruma  $v_2$  noteikšanai jāzina ballistiskā svārsta pacelšanās augstums  $h$ . Šo lielumu viegli var noteikt, apskatot 1.9. attēlu.

Taisnleņķa trijstūrim ar malām  $l$  (rāmīša iekares diega garums),  $s$  (rāmīša novirze no miera stāvokļa) un  $(l-h)$  var uzrakstīt:

$$s^2 = l^2 - (l-h)^2 \quad \text{jeb} \quad h^2 - 2lh + s^2 = 0,$$

no šejienes

$$h = l - \sqrt{l^2 - s^2} \quad (1.25)$$

Ņemot vērā (1.25), ātrumu pēc sadursmes  $v_2$  var izteikt

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(l - \sqrt{l^2 - s^2})} \quad (1.26)$$

un pēc matemātiskiem vienkāršojumiem iegūst:

$$v_l = \left(1 + \frac{m_r}{m_l}\right) s \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.27)$$

Lodītes virzes kustību var iegūt ar rotāciju vai bez tās. Ja lodīte slīd pa slīpi novietotu reni no augstuma  $H$  bez rotācijas, tad tās potenciālā enerģija pāriet virzes kustības kinētiskajā enerģijā

$$mgH = \frac{mv_v^2}{2} \quad \text{jeb} \quad v_v = \sqrt{2gH} \quad (1.28)$$

Turpretī, ja lodīte ripo no augstuma  $H$ , tās potenciālā enerģija pāriet kinētiskās enerģijas divos veidos - virzes kustības un rotācijas kustības kinētiskajā enerģijā:

$$mgH = \frac{mv_v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (1.29)$$

Ievietojot (1.29) izteiksmē lodītes inerces momenta vērtību  $I = \frac{2}{5}mr^2$  un leņķisko ātrumu

$$\omega = \frac{v_v}{r}, \quad \text{dabū}$$

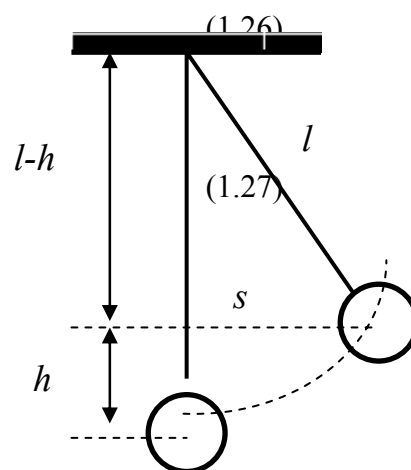
$$mgH = \frac{7}{5}mv^2 \quad (1.30)$$

No (1.30) var izteikt lodītes kustības ātrumu, ja tā ripo no augstuma  $H$ :

$$v_{v+r} = \sqrt{\frac{10}{7}gH} \quad (1.31)$$

Augstums  $H$  jāmēra no lodītes smaguma centra augšējā stāvoklī līdz lodītes smaguma centram apakšējā stāvoklī svārsta rāmīša satvērējā.

Pēc visu eksperimentālo datu apstrādāšanas grafiski jāattēlo lodītes ātruma atkarība no augstuma  $H$ , no kura tā krīt. Tā kā lodītes ātrumu izsaka eksperimentālā formula (1.27) un teorētiskā formula, ievērojot lodītes rotācijas kustību (1.31), tad arī grafikā jābūt divām līknēm.



1.9. att. Ballistiskā svārsta matemātiskais modelis.

*Darba uzdevumi.*

1. Eksperimentāli noteikt lodītes ātrumu pirms sadursmes, ja tā ripo no 5 dažādiem augstumiem un salīdzināt rezultātus ar teorētiskajiem aprēķiniem.
2. Attēlot grafiski lodītes ātruma (pirms sadursmes) atkarību no “krišanas” augstuma  $H$ .

## 2.2. Elektriskā lauka pētīšana

Par elektrisko lauku sauc īpašu matērijas veidu, kas eksistē telpā ap elektriskajiem lādiņiem. Ja lādiņi attiecībā pret novērotāju ir miera stāvoklī, to radīto lauku sauc par elektrostātisko lauku. Elektrostātisko lauku katrā punktā var raksturot ar elektriskā lauka intensitātes vektoru  $E$  un šī punkta potenciālu  $\varphi$ .

Pētīt elektrisko lauku nozīmē atrast jebkurā lauka punktā tā raksturlielumus - potenciālu  $\varphi$  un lauka intensitāti  $E$ . Uzskatāmai elektriskā lauka attēlošanai izmanto ekvipotenciālās līnijas un intensitātes līnijas (spēka līnijas).

Par *elektriskā lauka intensitātes līnijām* (spēka līnijām) sauc līnijas, kurām katrā to punktā novilkta pieskare sakrīt ar lauka intensitātes vektoru šajā punktā.

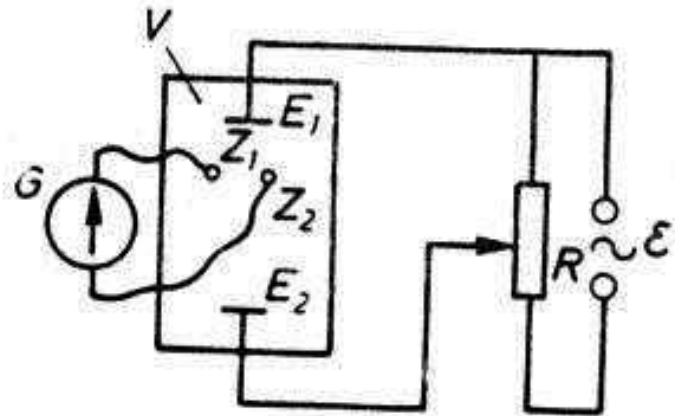
Elektriskā lauka to punktu ģeometrisko vietu, kuru potenciāli vienādi, sauc par *ekvipotenciālo virsmu* (divu dimensiju gadījumā - par *ekvipotenciālo līniju*). Var pierādīt, ka intensitātes līnijas ir ortogonālas ekvipotenciālajām līnijām to krustošanās vietās (resp., pieskares, kas novilkta to krustpunktos, ir savstarpēji perpendikulāras). Tāpēc, ja ir atrastas dotā lauka ekvipotenciālās līnijas, var uzzīmēt arī intensitātes līnijas.

Elektrostātiskā lauka eksperimentālai pētīšanai var lietot analogiju, kāda pastāv starp potenciāla sadalījumu elektrostātiskajā laukā un vadošā vidē, pa kuru plūst stacionāra (laikā nemainīga) elektriskā strāva. Šādu vadošu vidi turpmāk sauksim par strāvas lauku. Līdz ar to elektrostātiskā lauka pētīšanu starp uzlādētiem vadītājiem var aizstāt ar stacionāras strāvas lauka pētīšanu starp pašiem vadītājiem, ja šo vadītāju potenciāls tiek uzturēts pastāvīgs un vadošai videi ir ievērojami lielāka īpatnējā pretestība nekā uzlādēto vadītāju (elektrodu) materiāliem. Šādu metodi, kurā vienu lauku aizstāj ar citu ekvivalentu lauku, sauc par elektrostātiskā lauka modelēšanu.

Lai pētītu lauku, vadošā vidē ievieto divus pārvietojamus elektrodus - zondes. Katra zonde pieņem tā punkta potenciālu, kurā tā novietota. Ja potenciālu difference starp abām zondēm vienāda ar nulli, tad tas liecina, ka tās atrodas uz ekvipotenciālas virsmas.

Zondes savienotas ar elektrisko mēraparātu, kura pretestībai jābūt ievērojami lielākai par vides pretestību starp zondēm, lai nemainītos potenciāla sadalījums vidē.

Praktiski elektrisko lauku var modelēt, izmantojot elektrolītisko vannu ar plakanu dibenu, uz kura izveidots koordinātu tīkls. Vannas malās nostiprina pētāmos elektrodus, kuriem var būt dažāda forma. Elektrodus savieno ar strāvas avotu, kurš uztur to potenciālu nemainīgu. Bieži lieto arī maiņstrāvas avotus, jo minētā analogija saglabājas arī maiņstrāvas gadījumā. Tad tiek novērstas arī elektriskās polarizācijas parādības.



2.4. att. Slēguma shēma elektrostātiskā lauka pētīšanai.

Par strāvas vadītāju lieto stipri atšķaidītu elektrolīta šķīdumu, kuru traukā iepilda plānā (2 - 4 mm) kārtiņā. Stingri jāievēro, lai trauks būtu novietots horizontāli un līdz ar to šķīduma kārtiņas biezums būtu viscaur vienāds.

Saslēdz ķēdi pēc 2.4. attēlā parādītās shēmas. Vannā ievieto dotos elektrodus, ielej elektrolīta šķīdumu. Ar skrūvēm vannas kājiņās vannu novieto horizontāli. Vienu no zondēm (pamatzondi) novieto kādā punktā (aptuveni 1 - 2 cm attālumā no elektroda) un ar otru - pārvietojamo zondi - meklē punktus, kuru potenciāls ir tas pats. Šo punktu skaitam jābūt tādam, lai pilnīgi izveidotos ekvipotenciālās līnijas izskats. Pēc tam pamatzondi pārvieto dažus centimetrus tālāk un atkal atkārtoti meklējumus ar pārvietojamo zondi. Tā turpina, kamēr izpētīts viss lauks.

Lauku attēlo grafiski, izmantojot iegūtos mērījumus. Vispirms uzzīmē ekvipotenciālās līnijas, tad velk intensitātes līnijas tā, lai krustojumu vietās ar ekvipotenciālajām līnijām tās būtu savstarpēji perpendikulāras.

#### *Darba uzdevumi.*

1. Noteikt divu doto elektrodu elektriskā lauka punktus, kuru potenciāli ir vienādi.
2. Noteikt elektriskā lauka ekvipotenciālās līnijas, ievietojot elektriskajā laukā
  - a) dotās formas vadītāju;
  - b) dotās formas dielektriķi.
3. Attēlot grafiski doto elektrisko lauku, uzzīmējot ekvipotenciālās līnijas un intensitātes līnijas.

## 2.3. Vielu elektriskā vadītspēja un tās atkarība no temperatūras

### 2.3.1. Metālu elektriskā vadītspēja.

Metāli ir labi elektrības vadītāji. Eksperimentāli iegūts, ka īpatnējā vadītspēja ir apgriezti proporcionāla temperatūras pirmajai pakāpei:

$$\sigma \sim \frac{1}{T} . \quad (2.6)$$

Kvantu teorija nosaka, ka daļiņu (elektronu) plūsmu var uzskatīt arī par viļņu izplatīšanās procesu (Debroļjī viļņi). Metālos šo elektronu viļņa garums ir ievērojami lielāks nekā attālums starp kristālrežģa joniem. Pilnīgi ideālā periodiskā atomu režģī šāds brīvs elektrons, kustēdamies kā vilnis, nesastaptu nekādu pretestību. Ja reāla režģa joni būtu miera stāvoklī, elektronu viļņi arī tad izplatītos bez izkliedes (resp., brīvā ceļa garums būtu bezgalīgs).

Patiesībā reāla režģa joni svārstās termiskajā kustībā. Kristālrežģa termiskās svārstības var uzskatīt par stāvviļņu kopumu ar dažādiem viļņu garumiem. Šie stāvviļņi veido režģa elektriskā lauka nehomogenitātes, kuru izmēri tuvi elektronu viļņa garumam un tādēļ izraisa elektronu viļņu izkliedi (resp., brīvā ceļa garuma samazināšanos). Tā kā režģa svārstību intensitāte aug proporcionāli absolūtajai temperatūrai, tad elektriskā vadītspēja un līdz ar to šajā gadījumā brīvā ceļa garums mainās apgriezti proporcionāli absolūtajai temperatūrai.

Eksperimentāli iegūta šāda izteiksme pretestības atkarībai no temperatūras:

$$R_t = R_0(1 + \alpha t + \beta t^2) , \quad (2.7)$$

kur  $R_0$  - metāla pretestība  $0^\circ\text{C}$  temperatūrā,  $R_t$  - pretestība  $t$  grādu temperatūrā,  $\alpha$  un  $\beta$  - koeficienti, kas raksturīgi dotajam metālam.

Tāču tuvināti var pieņemt, ka pretestības atkarību no temperatūras izsaka lineāra sakarība:

$$R_t = R_0(1 + \alpha t) \quad (2.8)$$

Lielumu

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0 t} = \frac{R_t - R_0}{R_0 t} \quad (2.9)$$

sauc par pretestības termisko koeficientu. lielākajai daļai tīru metālu, ja temperatūra mainās par  $1^\circ\text{C}$ , pretestība mainās par  $1/273$  no savas vērtības  $0^\circ\text{C}$  temperatūrā. Praktiski  $\alpha$  aprēķināšanai var izmantot aptuvenu izteiksmi:

$$\alpha = \frac{R_{t_2} - R_{t_1}}{R_0(t_2 - t_1)} \quad (2.10)$$

kur  $t_1$  un  $t_2$  - eksperimentā izraudzītās temperatūras, bet  $R_{t_1}$  un  $R_{t_2}$  - parauga pretestības attiecīgajā temperatūrā,  $R_0$  – pretestība pie  $0^\circ\text{C}$  temperatūras.

Šādā gadījumā tiek pieņemts, ka lielums

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{dR}{dt} \quad (2.11)$$

ir nemainīgs, resp., maz mainīgs.

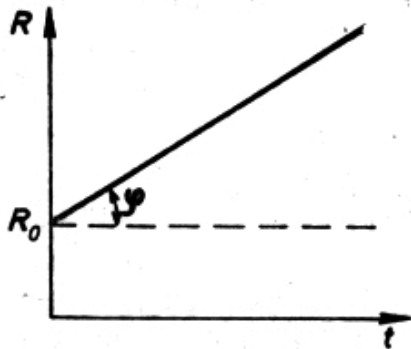
Ja aprēķinus veic pēc izteiksmes (2.9), tad jāzina  $R_0$  vērtība. To iegūst no grafika  $R=f(t)$ , ekstrapolējot līkni līdz krustpunktam ar  $R$  asi (skat. 2.5. att.)

Viegli saprotams, ka šādā gadījumā

$$\alpha = \frac{\text{tg } \varphi}{R_0} \quad (2.12)$$

vai arī

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0 t} \quad (2.13)$$



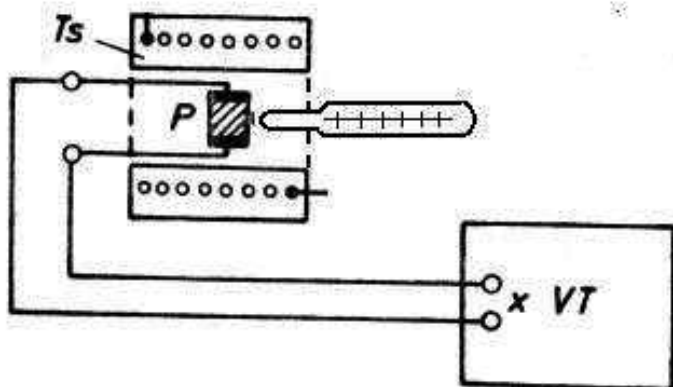
2.5. att. Metāliska vadītāja pretestības atkarība no temperatūras.

Ja leņķi  $\alpha$  mēra tieši ar leņķmēru, tad abas koordinātu asis ir jāzīmē vienādos mērogos. Attiecīgie nogriežņi jāmēra uz koordinātu asīm atliktajās vienībās, t.i., tie jānolasa uz koordinātu asīm.

Ja aprēķinam izmanto izteiksmi (2.10), tad nav vajadzīga  $R_0$  vērtība. Par  $t_1$  var izraudzīties piemēram, istabas temperatūru. Tad

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_{t_1} \Delta t} \quad (2.14)$$

Elektronu viļņi ļoti intensīvi izkliedējas no režģa elektriskā lauka neregularitātēm, kuras izveido piejaukuma joni. Tāpēc sakausējumu īpatnējā pretestība vienmēr ir lielāka nekā atsevišķo metālu īpatnējā pretestība.



2.6. att. Iekārta un slēguma shēma metālu un pusvadītāju elektriskās vadītspējas mērīšanai.

( $P$  - paraugs;  $T_s$  – termostats;  $VT$  – Vitstona tilts)

Darbā izmanto 2.6. attēlā parādīto iekārtu, kur pētāmais vadītājs ievietots krāsnī, kurai ir laba siltuma izolācija. Iekārtā iemontēts arī reostats, lai regulētu sildstrāvu (sildstrāvas regulēšanai var būt ieslēgts arī autotransformators). Lai sākumā vadītājs pārāk strauji nesiltu un lai darbotos kaut cik nostabilizētā temperatūras režīmā, reostatam ieslēdz maksimālo pretestību un krāsni silda

lēni. Kad sasniegta jau augstāka temperatūra, tad palielina strāvas stiprumu. Vadītāja pretestības mērīšanai lieto Vitstona tilta metodi. Šajā nolūkā vadītāja izvadspaiļes savieno ar kāda līdzstrāvas tehniskā tilta ( $MB$  vai  $MB-47$ , vai  $MBY-49$ ) pretestības  $R$  mērīšanas pieslēgpailēm. Mēra ik pēc noteiktiem temperatūras intervāliem visā dotajā temperatūras apgabalā. Temperatūru mēra vai nu ar graduētu termopāri (tādā gadījumā termopārim pieslēdz milivoltmetru vai potenciometru III, kura graduēšanas grafiks zināms), vai vienkārši termometru. Rezultātus var pārbaudīt, atkārtoti mērot atdzišanas režīmā.

Sakarību  $R=f(t)$  attēlo grafikā. Iegūtā likne praktiski gandrīz sakrīt ar taisni.

#### Darba uzdevumi.

1. Noteikt dotā vadītāja pretestības atkarību no temperatūras norādītajā temperatūras apgabalā. Iegūto sakarību attēlot grafiski, pārbaudot lineāro sakarību.
2. Aprēķināt dotā vadītāja pretestības termisko koeficientu. Pēc tabulām noteikt iespējamo vadītāja materiālu.